Calcul différentiel et intégral pour les sciences de la vie I ; MAT1730
Examen Partiel – 3 octobre 2018

Professeur: Cheikh Ndongo

Questions à choix multiple

Question 1 (1 point)
Trouvez les solutions de $|2 - x^2| = 7$.

A: ± 2	**B**: $\pm\sqrt{2}$	**C**: Pas de solutions
D: ± 3	**E**: $\pm\sqrt{3}$	**F**: 0

Solution:

$$|2 - x^2| = 7 \Rightarrow 2 - x^2 = -7 \quad \text{ou} \quad 2 - x^2 = 7$$

La première équation donne $x^2 = 9$. Donc, $x = \pm 3$. La deuxième équation donne $x^2 = -5$. Il n'y a pas de solutions.

Réponse : D

Question 2 (1 point)
Quelle est le domaine de la fonction $f(x) = \dfrac{\ln(2-x)}{\sqrt{2x+1}}$?

A: Pour tout x	**B**: $x > 0$	**C**: $-1 < x < 1/2$
D: $x < -1/2$ ou $x > 2$	**E**: $x > -1/2$	**F**: $-1/2 < x < 2$

Solution:
Puisque ln est seulement définie pour les nombres positifs, on doit avoir $2 - x > 0$. Donc, $x < 2$.

De même, puisque la racine carrée est définie seulement pour les nombres plus grand ou égaux à zéro, on doit avoir $2x + 1 \geq 0$. Donc, $x \geq -1/2$.

Finalement, on doit avoir $\sqrt{2x+1} \neq 0$ pour éviter une division par zéro. Donc, $x \neq -1/2$.

Les trois conditions doivent être satisfaites. Donc, $-1/2 < x < 2$.

Réponse : F

Question 3 (1 point)
Laquelle des expressions suivantes est égale à $\ln(e^{2x}x^5)$ sur son domaine ?

A: $2x + 5\ln(x)$	**B**: $3x$	**C**: $5xe^{2x}$
D: $2 + 5\ln(x)$	**E**: $x + 3\ln(x)$	**F**: $10x\ln(e)$

Solution:

$$\ln(e^{2x}x^5) = \ln(e^{2x}) + \ln(x^5) = 2x + 5\ln(x)$$

Réponse : A

Question 4 (1 point)

Laquelle des expressions suivantes est égale à $\dfrac{\sqrt{4x^6+9}}{2x^4}$ pour $x > 0$?

A: $\sqrt{2x^2 + \frac{9}{2}x^{-4}}$	**B**: $\frac{3}{2} + 2x^{-3}$	**C**: $\sqrt{x^{-2} + \frac{9}{4}x^{-8}}$
D: $x^{3/2} + \frac{3}{\sqrt{2}}x^{-4}$	**E**: $\sqrt{x^2 + \frac{9}{4}x^{-4}}$	**F**: $x^{-1} + \frac{3}{2}x^{-4}$

Solution:

$$\frac{\sqrt{4x^6+9}}{2x^4} = \sqrt{\frac{4x^6+9}{4x^8}} = \sqrt{x^{-2} + \frac{9}{4}x^{-8}}$$

Réponse : C

Question 5 (**1 point**)
Trouvez la valeur de a qui fait que la fonction suivante est continue pour tout x, ou dites pourquoi elle ne peut pas être continue.

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) & \text{si} \quad x \leq 2 \\ \ln(ax) & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

A: pour toute valeur de a	**B**: $a = e^2$
C: $a = \dfrac{2}{e}$	**D**: $a = \dfrac{1}{2e}$
E: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existe mais n'est pas égale à $f(2)$	**F**: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ n'existe pas.

Solution:
$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \ln(ax) = \ln(2a)$ and $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) = \cos(\pi) = -1$. On cherche a telle que $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$. C'est-à-dire, $\ln(2a) = -1$. Donc, $a = \dfrac{1}{2e}$.

Réponse : D

Question 6 (**1 point**)
Quelle est la valeur de la limite $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1056 - 22x^2 + 183x^3}{2112 + 54x + 122x^3}\right)$?

A: $1/2$	**B**: $3/2$	**C**: 1
D: 0	**E**: $-\infty$	**F**: ∞

Solution:

$$\left(\frac{1056 - 22x^2 + 183x^3}{2112 + 54x + 122x^3}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1056/x^3 - 22/x + 183}{2112/x^3 + 54/x^2 + 122} = \frac{183}{122} = \frac{3}{2}$$

car $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^a} = 0$ for $a > 0$.

Réponse : B

Question 7 (**1 point**)
Depuis 1994, des biologistes ont observé une population de caribous dans le nord du Québec.

En tenant compte des naissances et décès seulement, leur étude a démontré que la population augment de 3% par année. Par contre, 1.5 caribous par km^2 sont tués chaque année pendant la période de chasse. Si C_t est le nombre de caribous par km^2 t année depuis le début de l'étude en 1994, lequel des SDD suivant décrit la dynamique de la population ?

A: $C_{t+1} = 0.03C_3 - 1.5$	**B**: $C_{t+1} = 1.03C_t + 1.5$	**C**: $C_{t+1} = 1.03C_t - 1.5$
D: $C_{t+1} = 0.97C_t + 1.5$	**E**: $C_{t+1} = 0.97C_t - 1.5$	**F**: $C_{t+1} = 0.03C_t + 1.5$

Solution:
Le SDD est de la forme $C_{t+1} = rC_t + b$ où $r = 1.03$ et $b = -1.5$.

Réponse : C

Questions à développement

Question 8 (**2 point**)
Quelle est la valeur de la limite $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{2x^2 - 7x + 3}{|x-3|}$?

Réponse : $\boxed{-5}$

Solution:

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{2x^2 - 7x + 3}{|x-3|} = \lim_{x\to 3^-} \frac{(x-3)(2x-1)}{3-x} = \lim_{x\to 3^-} (1-2x) = -5$$

car $|x-3| = 3 - x$ pour $x < 3$.

Question 9 (**2 points**)
Trouvez toutes les solutions de l'inégalité $\dfrac{x+5}{x-3} < \dfrac{1}{x}$. Donnez votre raisonnement au complet.

Réponse : $\boxed{-3 < x < -1 \text{ ou } 0 < x < 3}$

Solution:

$$\frac{x+5}{x-3} < \frac{1}{x} \Rightarrow 0 > \frac{x+5}{x-3} - \frac{1}{x} = \frac{x(x+5)-(x-3)}{x(x-3)} = \frac{x^2+4x+3}{x(x-3)} = \frac{(x+3)(x+1)}{x(x-3)}$$

Il y a quatre points où $\dfrac{(x+3)(x+1)}{x(x-3)}$ peut changer de signe : -3, -1, 0 et 3.

x	$x <$	-3	$< x <$	-1	$< x <$	0	$< x <$	3	$< x$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{(x+3)(x+1)}{x(x-3)}$	$+$	0	$-$	0	$+$	ND	$-$	ND	$+$

Donc $\dfrac{(x+3)(x+1)}{x(x-3)} < 0$ pour $-3 < x < -1$ et $0 < x < 3$.

Question 10 (**5 points**)
Le modèle logistique $x_{t+1} = x_t(2.9 - x_t)$ décrit une population d'escargots. Les unités de t sont les mois et x_t est le nombre d'escargots par m^2 au temps t.

a) Quelle est la fonction génératrice (itérative) f de ce SDD ?
Réponse : $f(x) = \boxed{x(2.9 - x)}$

b) Trouver les points d'équilibre x^* de ce SDD.
Réponse : $x^* = \boxed{0 \text{ et } 1.9}$

c) Tracez le graphe en forme de toile d'araignée pour la condition initiale $x_0 = 0.3$ (au moins quatre itérations). Le graphe de la fonction itérative vous est donné. Vous devez bien identifier les axes, les points d'équilibre, la condition initiale, etc.
Réponse :

d) Quelle sera le nombre d'escargots par m^2 à long terme ? Votre réponse doit faire référence aux points d'équilibre et à leur stabilité.
Réponse : $\boxed{\text{1.9 car c'est un point d'équilibre stable}}$

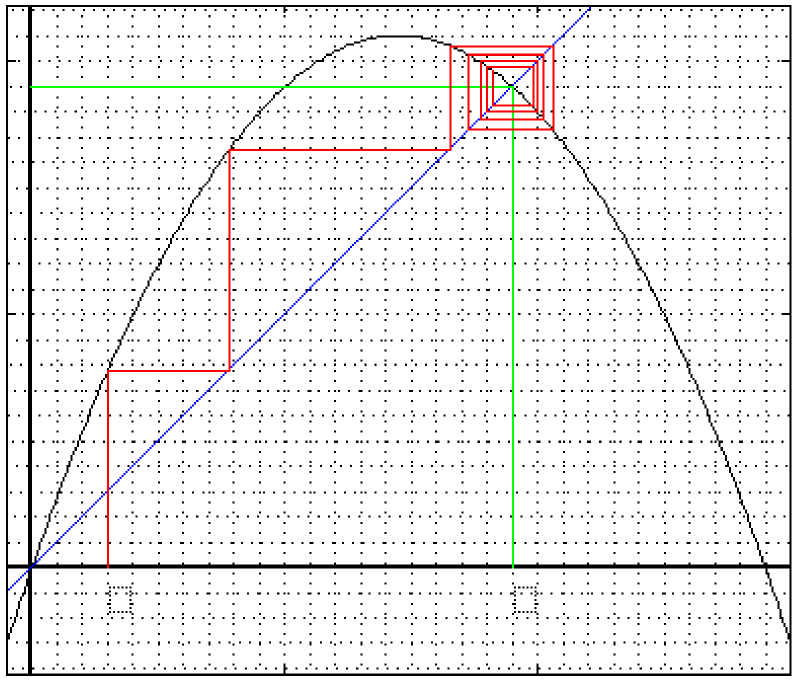
Solution:
a) La fonction génératrice est $f(x) = x(2.9 - x)$.

b) On cherche les points p tels que $p = f(p) = p(2.9 - p)$. Donc,

$$p = p(2.9 - p) = 2.9p - p^2 \Rightarrow p^2 - 1.9p = p(p - 1.9) = 0 \ .$$

On obtient $p = 0$ et $p = 1.9$.

c) Le graphe en forme de toile d'araignée pour $x_0 = 0.3$ est donné ci-dessous.



d) On peut conclure en analysant les orbites pour différentes conditions initiales que le point d'équilibre $p = 1.9$ est stable alors que le point d'équilibre $p = 0$ est instable.

Question 11 (**4 points**)

Un patient reçoit à chaque jour le médicament ToxicP qui est absorbé de façon continue par l'organisme. Un SDD qui décrit la concentration x_t en mg/L du médicament dans le sang au t ième jour du traitement est $x_{t+1} = 0.9x_t + 0.5$.

a) Trouver le point d'équilibre x^* de ce SDD, et donnez la solution générale du SDD étant donné la condition initiale $x_0 = 0.2$ mg/L.

Réponse : $x^* = \boxed{5}$ et $\boxed{x_t} = \boxed{5 - 4.8 \times 0.9^t}$

b) Quel est le nombre minimal de jours nécessaire pour obtenir une concentration d'au moins 4.8 mg / L du médicament ToxicP dans le sang ?

Réponse : $\boxed{31}$

c) Étonnamment, les tests au cours du traitement révèle que la concentration de ToxicP dans le sang du patient se stabilise à $x^* = 6$ mg/L. Une enquête découvre que la mauvaise écriture du médecin a fait en sorte que la dose c de ToxiP administré chaque jour n'était pas 0.5 mg/L. Quelle est la valeur de c ?

Réponse : $\boxed{0.6}$

Solution:

a) Le point d'équilibre x^* est la solution de $x^* = f(x^*) = 0.9x^* + 0.5$. Donc

$$x^* = 0.9x^* + 0.5 \Rightarrow 0.1x^* = 0.5 \Rightarrow x^* = 5$$

La solution générale pour $x_0 = 0.2$ est donc $x_t = (0.9)^t(0.2-5)+5 = 5-4.8\times 0.9^t$.

b) Pour répondre à la question, on cherche la plus petite valeur de t tel que $x_t > 4.8$.

$$\begin{aligned} 5-4.8\times 0.9^t > 4.8 &\Rightarrow 0.2 > 4.8(0.9)^t \Rightarrow 1/24 > (0.9)^t \\ &\Rightarrow -\ln(24) > \ln((0.9)^t) = t\ln(0.9) \\ &\Rightarrow t > \frac{-\ln(24)}{\ln(0.9)} \approx 30.16 \end{aligned}$$

Donc $t = 31$ jours.

c) On a que $x^* = 0.9x^* + c$ avec $x^* = 6$. Donc $6 = 5.4 + c$ et ainsi $c = 0.6$ mg/L.