- Erreurs communes :
  - Partir de la conclusion pour montrer l'hypothèse
  - Supposer que la conclusion soit vraie (alors que c'est ce qu'on veut montrer)
  - Ne pas utiliser les hypothèses.
  - Contredire les hypothèses.
  - Tourner en rond

Méthodes de preuves

1) Preuve directe : $p \to q$

Stratégie : - Supposer p
- Montrer que q suit de p (en utilisant p et/ou toutes informations que l'on connaît sur p)

Nombres entiers : $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Nombres entiers positifs : $\{1, 2, 3, \ldots\}$

ex : ~~Ex~~.

Définition : Un entier positif est impaire si $n = 2k+1$ pour un entier positif k.

Un entier positif est **paire** si $n = 2m$, pour un m entier positif.

(divisible par 2)

Démontrez le théorème suivant :

Théorème : Si n est un entier positif impaire, alors n^2 est un entier positif **pair**.

n est impaire. Donc, $n = 2k+1$, pour un k entier positif.

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$$
$$= 2L+1, \text{ où } L = 2k^2+2k$$

qui est un entier positif.

Donc, n^2 est impair.

__ex :__ __Définition :__ Soient m, n deux nombres entiers, où $m \neq 0$. On dit que m divise n (que l'on écrit $m|n$) si il existe un nombre entier k tel que

$$mk = n.$$

__ex :__

$2|4$ car $2 \cdot 2 = 4$.

$5|20$ car $5 \cdot 4 = 20$.

$7|84$ car $7 \cdot 12 = 84$.

Démontrez le résultat suivant à l'aide d'une preuve directe.

__Théorème :__ Soient a, b et c des nombres entiers tels que $a \neq 0$. Si $a|b$ et $a|c$, alors $a|(b+c)$.

__Preuve :__ $a|b$ implique que $b = ak_1$, où k_1 est un nombre entier.

$a|c$ implique que $c = ak_2$, où k_2 est un nombre entier.

Donc, $b + c = ak_1 + ak_2 = a(k_1 + k_2)$

$= aL$, où $k_1 + k_2 = L$ est un nombre entier

Ainsi, $a|(b+c)$ (car il existe un nombre entier L tel que $aL = b+c$).

ex: Démontrez le résultat suivant :

Si a est un nombre tel que $0<a<1$,
alors $0<a^2<a$.

preuve : $0<a<1$ veut dire que $0<a$ et $a<1$

Donc, $a\cdot 0 < a\cdot a$ et $a\cdot a < a\cdot 1$
$0<a^2$ et $a^2<a$

Ceci veut donc dire que $0<a^2<a$, qui est ce que l'on devait démontrer.

ex: Démontrez que la somme de deux nombres rationels est un nombre rationel.

Nombre rationel : Nombre de la forme $\frac{a}{b}$, où $b\neq 0$, b est un entier positif et a est un entier.

preuve : Soient 2 nombres rationels $\frac{a_1}{b_1}$ et $\frac{a_2}{b_2}$, où

a_1, a_2 sont des nombres entiers
b_1, b_2 sont des nombres entiers positifs.
$b_1\neq 0$, $b_2\neq 0$.

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 b_2}{b_1 b_2}+\frac{a_2 b_1}{b_1 b_2} = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2}$$ qui est aussi un nombre rationel car

$a_1 b_2 + a_2 b_1$ est un nombre entier
$b_1 b_2$ est un nombre entier positif (car $b_1, b_2 > 0$)
$b_1 b_2 \neq 0$ puisque $b_1\neq 0$ et $b_2 \neq 0$.

2) Preuve par contraposée

Notons que $p \to q$ est équivalent logiquement à $\neg q \to \neg p$

Parfois, il est plus facile de montrer $\neg q \to \neg p$ pour montrer que $p \to q$.

Stratégie: - On suppose que $\neg q$ est vrai

- on montre que $\neg p$ suit de $\neg q$

- on fait une preuve directe de $\neg q \to \neg p$

ex: Démontrez le résultat suivant:

Si $5n+4$ est un nombre impair, alors n est un entier impair.

preuve par contraposée p est: $5n+4$ est un nombre impair

q est: n est un nombre impair.

On veut montrer que $\neg q \to \neg p$ (qui est équivalent à $p \to q$)

$\neg q \to \neg p$ est: Si n est un entier pair, alors $5n+4$ est pair.

n est pair, alors $n = 2m$, pour un entier m.

$5n+4 = 5(2m)+4 = 2(5m+2) = 2L$, où $L = 5m$ est aussi un nombre entier.

Ceci montre que $5n+4$ est pair.

4 C'est ce que l'on devait démontrer.

ex : 2) Démontrez le résultat suivant :
Pour tout entier n, si n^2 est impair alors n est impair. Utilisez une preuve par la contraposée.

preuve : p : n^2 est impair
q : n est impair

On veut montrer que $\neg q \to \neg p$.
Donc, que si n est pair, alors n^2 est pair.

preuve : n est pair, alors $n = 2m$ où m est un entier. ~~positif~~

$$n^2 = (2m)^2 = 4m^2 = 2(2m^2) = 2L,$$ où $L = 2m^2$ est un entier positif.

Donc, n^2 est pair car il s'écrit sous la forme $2L = n^2$.

ex : 3) Démontrez, à l'aide d'une preuve par la contraposée, que si n est impair, alors $n+11$ est pair

preuve : p : n est impair
q : $n+11$ est pair

$\neg q \to \neg p$ devient si $n+11$ est impair, alors n est pair.

$n+11$ est impair veut dire qu'il existe un nombre entier k tel que $n+11 = 2k+1$

Donc, $n = 2k+1-11 = 2k-10 = 2(k-5)$
$= 2L$, où $L = k-5$ est aussi un nombre entier.

Puisque $n = 2l$, ceci montre que n est donc pair

3) Preuve par contradiction

On veut montrer que la proposition p soit vraie.
Pour ce faire, on montre que $\neg p$ est une contradiction.

Stratégie : - on suppose $\neg p$
- on montre qu'une contradiction s'ensuit.

ex : Démontrez par une preuve par contradiction que pour entier n, si n^2 est impair, alors n est impair

p : n^2 est impair, alors n est impair

a : n^2 est impair
b : n est impair

$p \equiv a \to b$ $\qquad \neg p \equiv \neg(\neg a \vee b) \equiv a \wedge \neg b$

Supposons donc que $\neg p \equiv a \wedge \neg b \equiv$ n^2 est impair et n est pair

n est pair alors $n = 2k$ pour un entier k.
$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2L$, où $L = 2k^2$
Donc, n^2 est pair. Ceci est une contradiction car n^2 est impair selon l'hypothèse.

Donc, $p \equiv a \to b$ doit être vrai