Université d'Ottawa · University of Ottawa

Faculté des sciences
Mathématiques et de statistique

Faculty of Science
Mathematics and Statistics

Arian NOVRUZI
Department of Mathematics and Statistics
University of Ottawa
email:novruzi@uottawa.ca

Méthodes Mathématiques I
MAT1700
Automne 2019
Examen de mi-session#2

NOM DE FAMILLE____________________ Prénom:__________________
(en lettres capitales)
Numéro d'étudiant:____________________

Instructions:

- La durée de l'examen est de 80 minutes.
- L'utilisation de manuel, notes de cours, calculatrice ou tout autre appareil électronique de calcul est interdite.
- Pour les problèmes à **choix multiple**: écrivez la reponse (lettre de 'A' à 'F') dans le tableau ci-dessous
- Pour les problèmes à **solution longue**: écrivez clairement la solution dans l'espace qui suit la question. Vous pouvez utiliser le verso des pages si nécessaire (veuillez clairement l'indiquer dans ce cas).
- Vous trouverez une feuille de brouillon à la fin du questionnaire.
- Ne détachez pas le questionnaire.
- **NB**
  Les téléphones cellulaires, les appareils électroniques non autorisés ou les notes de cours (à moins qu'il s'agisse d'un examen livre ouvert) ne sont pas autoriss pendant cet examen. Les téléphones et les appareils doivent être éteints et rangés dans votre sac. Ne les gardez pas en votre possession, par exemple dans vos poches. Si vous êtes pris avec un tel appareil ou document, des allégations de fraude scolaire seront déposes, ce qui pourrait entrainer l'obtention d'une note 0 (zéro) pour l'examen.
  En apposant votre signature ci-dessous, vous reconnaissez avoir lu et vous assurer de respecter l'énoncé ci-dessus.

Signature:_______________

Problème	1	2	3	4	5	6	7	Total
	à choix multiple (votre reponse: une lettre A-F)				à solution longue (espace pour le correcteur)			
Votre résultat	B	B	C	E				

Problèmes à choix multiple (5 points chacun)

Problème 1 *Combien de points critiques a la fonction* $f(x) = xe^{5x}$?

A) 0 $\boxed{\text{B) 1}}$ C) 2 D) 3 E) 4 F) 5

→ f est différentiable partout; donc, elle a des P.C. du type I :

$f'(x) = 0$

$1 \cdot e^{5x} + x e^{5x} \cdot 5 = 0$

$e^{5x} \cdot (1 + 5x) = 0$

$1 + 5x = 0$

$x = -\frac{1}{5}$

Problème 2 *Soit* $C(x) = -x^2 + 4x - 3$ *la fonction coût d'un produit. Que vaut son minumim dans l'intervalle* $[0, 3]$?

A) -1 $\boxed{\text{B) } -3}$ C) -9 D) -12 E) -18 F) 0

→ f est continue dans $[0, 3]$ et $[0, 3]$ est fermée et bornée

→ $f'(x) = -2x + 4 = 0$

$2x = 4, \quad x = 2$

→ $f(0) = -3$

$f(2) = -4 + 8 - 3 = 1$

$f(3) = -9 + 12 - 3 = 0$

→ $\min \{f(x), x \in [0, 3]\} = -3$

Problème 3 *Combient de points d'inflexion admet la fonction* $f(x) = x^4 - 12x^2 + 3x - 5$.

A) 0   B) 1 $\boxed{\text{C) 2}}$ D) 3   E) 4   F) 5

$\rightarrow \quad f'(x) = 4x^3 - 24x + 3$

$f''(x) = 12x^2 - 24$

$\rightarrow \quad f''(x) = 0, \quad 12x^2 - 24 = 0$

$x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{2}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cup$	PI	$\cap$	PI	$\cup$	

Problème 4 *La profit marginal d'un produit est* $P'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. *On sait que* $P(1) = 10$. *Trouvez* $P(4)$.

A) 1   B) 2   C) 4   D) 8 $\boxed{\text{E) 12}}$ F) 18

$\rightarrow \quad P(x) = \int P'(x)\,dx = \int \left(1 - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

$= \int \left(1 - 4x^{-2} + x^{-1/2}\right)dx = x - 4\frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C$

$P(x) = x + 4x^{-1} + 2x^{1/2} + C$

$\rightarrow \quad P(1) = 10 \; ; \quad 1 + 4 + 2 + C = 10$

$C = 3$

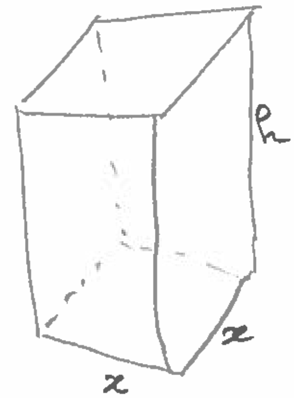
$\rightarrow \quad P(4) = 4 + 4 \cdot 4^{-1} + 2 \cdot 4^{1/2} + 3$

$= 4 + 1 + 4 + 3$

$= 12$

Problèmes à solution longue

Problème 5 (7 points)[1] *On fait des boîtes rectangulaires de base carrée et de volume 12 cm^3. Le coût d'une base est de \$2 par cm^2, alors que le coût de l'autre base et de chaque autre face est de \$1 par cm^2. Quelles sont les dimensions de la boîte qui minimisent le coût?*



→ $V = \text{volume} = x^2 \cdot h$

$x^2 \cdot h = 12$

→ $C = \text{Coût}$

$C = 2 \cdot x^2 + 1 \cdot (x^2 + 4xh)$

$C = 3x^2 + 4xh$

De $x^2 h = 12$, $h = \dfrac{12}{x^2}$ et alors

$C(x) = 3x^2 + 4x \cdot \dfrac{12}{x^2} = 3x^2 + \dfrac{48}{x}.$

→ $\min\{C(x),\ x \in (0, \infty)\}$

→ P.C. $\quad C'(x) = 6x - \dfrac{48}{x^2} = \dfrac{6x^3 - 48}{x^2} = 0$

$6x^3 - 48 = 0, \quad x^3 = 8, \quad x = 2.$

→ Classification :

$C''(x) = 6 + \dfrac{48 \cdot 2}{x^3}, \quad C''(2) > 0.$

Donc, $x=2$ est min. loc. Or, $x=2$ est le seul P.C.
Alors, $x=2$ est min. global

→ $x = 2$, $h = \dfrac{12}{2^2} = 3$ minimisent le coût

[1] Donnez tous les détails de la solution

Problème 6 (6 points)[2] *Calculez les integrales suivantes.*

$$\int \frac{x}{\sqrt{3-x^2}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{t}}\, dx$$

$$t = 3 - x^2$$

$$dt = -2x\, dx$$

$$-\frac{1}{2}dt = x\, dx$$

$$= \int \frac{-\frac{1}{2}\, dt}{\sqrt{t}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\, dt$$

$$= -\cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{t^{1/2}}{\cancel{1/2}} + C$$

$$= -t^{1/2} + C$$

$$= -\sqrt{3-x^2} + C.$$

[2] Donnez tous les détails de la solution

Problème 7 (7 points)[3] *La fonction demande d'un produit est $p(x) = 150 - x^2$.*

1. *Trouvez l'élasticité de la demande*[4].
2. *Par la suite considérons $x = 5$.*
   (a) *Évaluez l'élasticité et indiquez si la demande est élastique/inélastique/unitaire.*
   (b) *Pour une montée du prix par %1, trouvez par combien croît/decroît la demande.*
   (c) *Par la suite, %1, trouvez par combien croît/decroît le revenu? Expliquez tout en détail.*

pour une montée du prix par. %1.

1) $$\eta(x) = \frac{p(x)}{x\,p'(x)} = \frac{150 - x^2}{x\cdot(-2x)} = \frac{100 - x^2}{-2x^2}.$$

2) $x = 5$

(a) $$\eta(5) = \frac{150 - 5^2}{-2\cdot 5^2} = \frac{125}{-50} = -\frac{5}{2}$$

$|\eta(5)| = \frac{5}{2} > 0$; donc la demande est élastique.

(b) $\frac{\Delta x}{x} \approx \eta(x)\frac{\Delta p}{p}$; $\frac{\Delta p}{p} = \%1 \Rightarrow \frac{\Delta x}{x} \approx -\frac{5}{2}\cdot\%$; $x \searrow -\frac{5}{2}\%$

(c) $\frac{\Delta R}{R} \approx (1+\eta(x))\frac{\Delta p}{p} = \left(1 - \frac{5}{2}\right)\cdot 1\% = -\frac{3}{2}\%$; $R \searrow -\frac{3}{2}\%$.

[3] Donnez tous les détails de la solution

[4] On rappelle que $\eta(x) = \frac{p(x)}{xp'(x)}$. De plus $\frac{\Delta x}{x} \approx \eta(x)\frac{\Delta p}{p}$ et $\frac{\Delta R}{R} \approx (1 + \eta(x))\frac{\Delta p}{p}$