CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRALE I **(MAT1720 W)**

EXAMEN PARTIEL I DE PRATIQUE **(Automne 2017)**

Professeur: Joseph Khoury **Durée: 80 minutes**

Nom de famille: Solutions

Prénom:

Numéro d'étudiant:

Aucune note n'est permise.

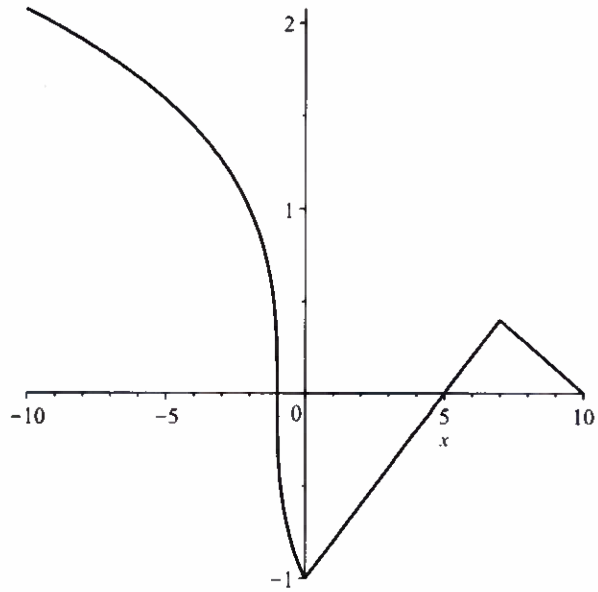
Les calculatrices sont permises.

Cet examen comporte 8 questions et 10 pages. Les questions à choix multiples (1 à 5) valent chacune 2 points sur les 22 points que compte l'examen. Inscrire à l'ENCRE dans les cases ci-dessous les LETTRES correspondant aux réponses à ces questions.

1	2	3	4	5

Les questions 6 à 9 sont à développement et requièrent une réponse détaillée. Prenez soin de bien rédiger votre solution. Vous pouvez utiliser le verso des pages ou les deux pages additionnelles entre les questions à développement si vous manquez d'espace au recto.

1. Le graphe d'une fonction f est donné:



Lesquels des énoncés suivants sont **vrais**?

(1) la fonction n'est pas continue au point $x = -1$ FAux : f est continue
(2) $f'(0) = 0$ FAux $f'(0)$ n'existe pas
(3) $f'(0)$ n'existe pas : VRAI
(4) $f'(-1)$ n'existe pas VRAI Car la tangente est verticale
(5) La dérivée f' de f est positive dans l'intervalle $]7, 10[$: FAux Car f est décroissante
(6) $f'(7) = 0$: FAux $f'(7)$ n'existe pas

A. (1) seulement
B. (2) et (6)
C. (1), (3) et (6)
D. (2), (4) et (5)
E. (3) seulement
F. (3) et (4)

2. Résoudre l'équation:

$$\log_4 x + \log_4(x - 12) = 3$$

pour x.

A. $x = -4$ seulement
B. $x = 16$ et $x = -4$
C. Aucne des autres réponses
D. $x = 8$ et $x = -4$
E. $x = 16$ seulement
F. $x = 9$ seulement

Il faut que $x > 0$ et $x - 12 > 0 \Rightarrow x > 12$.
$\log_4 x(x-12) = 3 \Rightarrow x(x-12) = 4^3 = 64 \Rightarrow x^2 - 12x - 64 = 0 \Rightarrow$
$(x-16)(x+4) = 0 \Rightarrow x = 16, x = -4$. Seul $x = 16$ satisfait
la Condition $x > 12$

3. Laquelle des fonctions suivantes est la fonction **inverse** de $f(x) = \frac{3x+4}{x-2}$?

A. $y = \frac{2(x-2)}{x-3}$
B. Aucne des autres réponses
C. $y = \frac{2x+4}{3-x}$
D. $y = \frac{x-2}{3x+4}$
E. $y = \frac{2(x+3)}{x-2}$
F. $y = \frac{2(x+2)}{x-3}$

$$y = \frac{3x+4}{x-2} \Rightarrow 3x+4 = xy - 2y \Rightarrow 4 + 2y = x(y-3) \Rightarrow x = \frac{2y+4}{y-3}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2(x+2)}{x-3}$$

4. Trouver toutes les valeurs de x dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ qui satisfont l'inégalité:

$$\cos x \leq \sin(2x).$$

(Indication. Utiliser l'identité trigonométrique $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$)

A. $[0, \pi/6] \cup [3\pi/2, 2\pi]$
B. $[0, \pi/3] \cup [3\pi/4, 2\pi]$
C. $[0, 2\pi/3]$
D. Aucune des autres réponses
E. $[\pi/6, \pi/2] \cup [5\pi/6, 3\pi/2]$
F. $[\pi/6, 2\pi]$
G. $[0, \pi/4] \cup [\pi/2, 3\pi/4]$

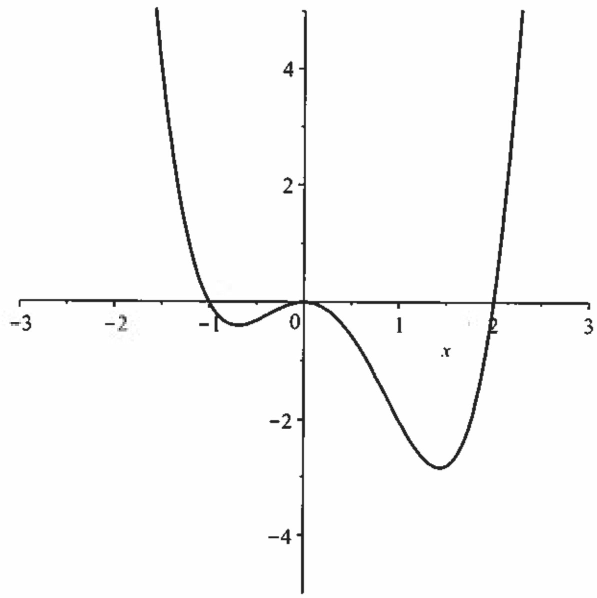
$$\cos x - \sin(2x) \leq 0 \Rightarrow \cos x - 2\sin x \cos x \leq 0 \Rightarrow \cos x(1 - 2\sin x) \leq 0.$$

* $\cos x = 0 \Rightarrow x = \pi/2, \quad x = 3\pi/2$
* $1 - 2\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 1/2 \Rightarrow x = \pi/6, \quad x = 5\pi/6$

x	0		$\pi/6$		$\pi/2$		$5\pi/6$		$3\pi/2$		2π
$\cos x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$1-2\sin x$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\cos x(1-2\sin x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Alors $\cos x \leq \sin(2x) \iff x \in \left]\pi/6, \pi/2\right[\cup \left]5\pi/6, 3\pi/2\right[$

5. La courbe suivante représente le graphe de la **dérivée** f' d'une fonction f:



Lesquels des énoncés suivants sont **vrais**?

(1) La fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty, -1[$
(2) La fonction f est concave vers le bas sur l'intervalle $]-\infty, -1[$
(3) La fonction f admet un minimum relatif au point $x = -1$
(4) La fonction f admet un minimum relatif au point $x = 0$
(5) La fonction f est concave vers le haut sur l'intervalle $]2, +\infty[$

A. (3) seulement **B.** (1) seulement **C.** (5) seulement
D. (2) et (5) **E.** (3) et (4) **F.** (1) et (4)

(1) FAux sur $]-\infty, -1[$, $f' > 0$, donc f est croissante

(2) VRAI sur $]-\infty, -1[$, f' est décroissante, donc f est concave vers le bas.

(3) FAux Au point $x = -1$, la fonction f change de positive à négative, donc f change de croissante à décroissante. Il s'agit alors d'un maximum relatif.

(4) FAux Au point $x = 0$, la dérivée ne change pas de signe, donc f n'admet pas un max ou un min relatif en ce point.

5) VRAI sur $]2, +\infty[$, f' est croissante, donc f est concave vers le haut

6. Les deux parties de cette questions sont indépendantes

(1) Calculer chacune des linites suivantes:

(i) $\lim_{x\to 2} \frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2}$

(ii) $\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{5+h}-\frac{1}{5}}{h}$

(iii) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2}{\sqrt{9x^4+1}}$

(2) Considérer la fonction f définie par morceaux de la façon suivante:

$$f(x) = \begin{cases} 3(4-x^2)+2n & \text{si} \quad x<2 \\ 4x+m & \text{si} \quad 2 \le x \le 3 \\ 3x^2-4x+n & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$$

où m et n sont deux constantes réelles. Trouver les valeurs de m et n pour lesquelles la fonction est continue sur $]-\infty, \infty[$.

(1) (i) $\lim_{x\to 2} \frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(3-\sqrt{2x+5})}{(x-2)} \cdot \frac{3+\sqrt{2x+5}}{3+\sqrt{2x+5}} =$

$\lim_{x\to 2} \frac{9-(2x+5)}{(x-2)(3+\sqrt{2x+5})} = \lim_{x\to 2} \frac{-2(x-2)}{(x-2)(3+\sqrt{2x+5})} = \lim_{x\to 2} \frac{-2}{3+\sqrt{2x+5}} = -1/3$

(ii) $\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{5+h}-\frac{1}{5}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{5-(5+h)}{h(5)(5+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{5(5+h)} = -\frac{1}{25}$

(iii) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2}{\sqrt{9x^4+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2}{\sqrt{x^4(9+1/x^4)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2}{x^2\sqrt{9+1/x^4}} =$

$\lim_{x\to\infty} \frac{5}{\sqrt{9+1/x^4}} = \frac{5}{3}$

(2) Continuité au point $x=2$: $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow$

$3(4-2^2)+2n = 4(2)+m \Rightarrow 2n = 8+m$ (1)

Continuité au point $x=3$: $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3) \Rightarrow$

$4(3)+m = 3(3)^2-4(3)+n \Rightarrow 12+m = 15+n \Rightarrow m = 3+n$ (2)

(1) $\Rightarrow 2n = 8+(3+n) \Rightarrow n = 11$

(2) $\Rightarrow m = 3+n = 14$

7.

(i) Utiliser la **définition de la dérivée** pour trouver la dérivée de la fonction

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{x}.$$

(ii) La fonction f est-elle croissante ou décroissante au point $x = -1$?

(i) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - \frac{1}{x+h} - \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - \frac{1}{x+h} - x^2 + \frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2x^2h(x+h) + h^2x(x+h) - x + x + h}{hx(x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2x^2(x+h) + hx(x+h) + 1}{x(x+h)} = \frac{2x^3+1}{x^2} = 2x + \frac{1}{x^2}$$

(ii) $f'(-1) = 2(-1) + \frac{1}{(-1)^2} = -1 < 0$. Alors f est décroissante au point $x = -1$

8. En 2017, il y avait un accident nucléaire dans un petit village ayant 1200 habitants. L'incident a libéré 600 L d'une matière radioactive dont la demi-vie est de 65 ans dans l'atmosphère. La population du village continue à augmenter à un taux de 1% par année.

(1) Donner une expression du volume $V(t)$ (en L) de la matière radioactive qui reste dans l'atmosph'ere en fonction du temps t mesuré en années à partir de 2017.

(2) Donner une expression de la population $P(t)$ du village en fonction du temps t mesuré en années à partir de 2017.

(3) Les scientifiques ont déterminé que le danger est complétement éliminé si le rapport du volume de la matière radioactive (en L) sur le nombre d'habitants est égale à 0.075
Estimer en quelle année le danger est complétement éliminé.

(1) le volume qui reste après t années est donné par

$$V(t) = V_0 (1/2)^{t/h} = 600\,(1/2)^{t/65}$$

(2) la population du village après t années est donnée par

$$P(t) = P_0\,(1.01)^t = 1200(1.01)^t$$

(3) $$\frac{V(t)}{P(t)} = 0{,}75 \Rightarrow \frac{600(1/2)^{t/65}}{1200\,(1.01)^t} = 0.075 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{0.5^{\frac{1}{65}}}{1.01}\right)^t = 0.075$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.5^{1/65}}{1.01}\right)^t = 0.15 \Rightarrow t \ln\left(\frac{0.5^{1/65}}{1.01}\right) = \ln(0.15)$$

$$t = \frac{\ln(0{,}15)}{\ln\left(\frac{0.5^{1/65}}{1.01}\right)} \simeq 92 \text{ années.}$$

Alors le danger est complètement éliminé en $2017+92 = 2109$.