

MAT 1739 - Cours 8

Dérivées (fin)

Automne 2019

Table des matières

2 Règles de dérivation	1
2.6 Dérivation et continuité	1
2.7 Dérivée seconde, vitesse et accélération	2
3 Exemples d'application des dérivées	3
3.1 Fonctions utilisées en économie	3
3.2 Les fonctions dérivées utilisées en économie	3
3.3 Un exemple	3

2 Règles de dérivation

Exemple. Soit f définie par $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Calculez $f'(x)$.

On a $f(x) = u(v(x))$ avec $u(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ et $v(x) = 4 - x^2$. La formule donne

$$f'(x) = \underbrace{-2x}_{v'(x)} \times \underbrace{\frac{1}{2}(4 - x^2)^{-1/2}}_{u'(v(x))} = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

2.6 Dérivation et continuité

Proposition 1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en un point a . Alors f est continue en a . La dérivabilité implique la continuité. La réciproque est fausse : f peut-être continue en a mais non dérivable en a .

Justification : Supposons f dérivable en a . Soit $h \neq 0$. Alors on a

$$f(a + h) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \times h + f(a),$$

et en passant à la limite on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \right) \times \lim_{h \rightarrow 0} h + f(a) = f'(a) \times 0 + f(a) = f(a).$$

Donc f est continue en a .

2.7 Dérivée seconde, vitesse et accélération

Définition 2. Soit f une fonction dérivable dont la dérivée f' est elle-même dérivable. On appelle *dérivée seconde* de f , notée f'' ou $f^{(2)}$, la fonction dérivée de la fonction f' .

Exemple. Calculez la dérivée seconde de la fonction $f : x \mapsto x^3$.

On a $f'(x) = 3x^2$, en dérivant de nouveau on obtient $f''(x) = 3 \times 2x = 6x$.

Exemple. On reprend l'exemple de Karen qui descend le canal Rideau et Franck qui relève la distance parcourue en fonction du temps. On note $d(t)$ la distance parcourue par Karen au temps t . On avait vu que la vitesse instantanée $v(t)$ de Karen était le taux de variation instantanée de la distance en t . On a donc la relation

$$v(t) = d'(t).$$

L'accélération $a(t)$ de Karen est par définition le taux de variation instantanée de la vitesse au temps t , on a donc la relation

$$a(t) = v'(t) = d''(t).$$

Exercice 3. Une grand-mère en haut d'un immeuble (90 mètres) laisse échapper son pot de fleur préféré. La hauteur du pot de fleur en fonction du temps $t \geq 0$ est $h(t) = 90 - 4.9t^2$.

- (a) Vitesse moyenne du pot de fleur entre 1 et 4 secondes ?
- (b) Vitesse (instantanée) en $t = 1$ et $t = 4$ secondes ?
- (c) Moment de l'impact ?
- (d) Vitesse du pot de fleur au moment de l'impact ?
- (e) Accélération du pot de fleur en fonction du temps ?

Solution :

- (a) La vitesse moyenne entre 1 et 4 secondes est le taux de variation moyen de la hauteur. On a donc

$$\begin{aligned} \text{TVM sur } [1, 4] &= \frac{h(4) - h(1)}{4 - 1} = \frac{\cancel{90} - 4.9 \times 4^2 - (\cancel{90} - 4.9 \times 1^2)}{4 - 1} \\ &= \frac{-4.9 \times 16 + 4.9}{3} \\ &= \frac{-4.9 \times 15}{3} = -24.5 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

La vitesse est négative car le pot de fleur tombe vers le bas...

- (b) La vitesse du pot de fleur est $v(t) = h'(t) = -4.9 \times 2t = -9.8t$. On a alors

$$v(1) = -9.8 \text{ m/s} \quad \text{et} \quad v(4) = -9.8 \times 4 = -39.2 \text{ m/s.}$$

- (c) Le pot de fleur atteint le sol au plus petit $t \geq 0$ tel que $h(t) = 0$. On résout

$$\begin{aligned} h(t) = 0 &\Leftrightarrow 90 - 4.9t^2 = 0 \Leftrightarrow 4.9t^2 = 90 \\ &\Leftrightarrow t^2 = 90/4.9 \\ &\Leftrightarrow t = \pm \sqrt{90/4.9}. \end{aligned}$$

Comme on veut $t \geq 0$, le pot de fleur atteint le sol en $t = \sqrt{90/4.9} \approx 4.3$ s.

- (d) La vitesse au moment de l'impact est alors $\approx v(4.3) = -9.8 \times 4.3 = -42.14$ m/s.
- (e) L'accélération du pot de fleur est $a(t) = v'(t) = -9.8$ m/s².

3 Exemples d'application des dérivées

3.1 Fonctions utilisées en économie

- La fonction exprimant la demande est symbolisée par p et représente le prix $p(x)$ d'un article lorsqu'un nombre x d'articles est vendu.
- La fonction exprimant le revenu, soit $R(x) = xp(x)$, est le produit du nombre x d'articles vendus et de la fonction de la demande (du prix).
- La fonction exprimant le coût, notée $C(x)$, est le coût total de la production de x unités d'un produit.
- La fonction exprimant le profit, notée $P(x)$, est le profit provenant de la vente de x unités d'un produit. Le profit vaut $P(x) = R(x) - C(x)$.

3.2 Les fonctions dérivées utilisées en économie

Les économistes utilisent le terme *marginal* pour désigner la dérivée d'une fonction appliquée en économie.

- $C' = \frac{dC}{dx}$ est la fonction exprimant le *coût marginal* et désigne le taux de variation instantané du coût total, en fonction du nombre d'articles produits x .
- $R' = \frac{dR}{dx}$ est la fonction exprimant le *revenu marginal* et désigne le taux de variation instantané du revenu total, en fonction du nombre d'articles vendus.
- $P' = \frac{dP}{dx}$ est la fonction exprimant le *profit marginal* et désigne le taux de variation instantané du profit total, en fonction de x .

3.3 Un exemple

Une entreprise vend mensuellement 1500 crèmes à main au prix de 10\$ chacun. Une étude de marché montre une diminution des ventes de 125 crèmes à main par mois pour chaque hausse du prix de 0.25\$.

- Déterminez la fonction $p(x)$ exprimant la demande.
- Déterminez le revenu marginal lorsqu'on vend 1000 crèmes à main par mois.
- Le coût de production de x crèmes à main est $C(x) = -0.004x^2 + 9.2x + 5000$. Déterminez le coût marginal lorsqu'on produit 1000 crèmes à main par mois.
- Déterminez le coût réel de la production de la 1001ème crème à main.
- Déterminez le profit et le profit marginal provenant des ventes mensuelles de 1000 crèmes à main.

Solution :

- Soit p le prix d'une crème à main, x le nombre de crèmes à main vendus, n le nombre d'augmentation de 0.25\$. Pour $n = 0$, on a $p = 10$ et $x = 1500$.
Pour $n = 1$, on a $p = 10 + 0.25 = 10.25$ et $x = 1500 - 125 = 1375$.
D'une manière générale, on a les formules :

$$\begin{cases} p = 10 + 0.25n \\ x = 1500 - 125n. \end{cases} \quad (3.1)$$

On veut p en fonction de x . On va utiliser la 2ème équation de (3.1) pour exprimer d'abord n en fonction de x .

Début cours 9

On a

$$\begin{aligned}x &= 1500 - 125n \Leftrightarrow 125n = 1500 - x \\&\Leftrightarrow n = \frac{1500 - x}{125}.\end{aligned}$$

On remplace n par cette expression dans la première équation de (3.1) :

$$\begin{aligned}p &= 10 + 0.25n = 10 + 0.25 \times \frac{1500 - x}{125} = 10 + \frac{1}{4} \times \frac{1500 - x}{125} \\&= 10 + \frac{1500 - x}{500} \\&= 10 + 3 - \frac{x}{500} \\&= 13 - \frac{x}{500}.\end{aligned}$$

La fonction prix est donc $p(x) = 13 - x/500$. C'est le prix d'une crème à main lorsque x crèmes à main sont vendues.

- (b) La fonction revenu R est donnée par la formule $R(x) = xp(x) = 13x - x^2/500$. Le revenu marginal est

$$R'(x) = 13 - 2 \times \frac{x}{500} = 13 - \frac{x}{250}.$$

Pour $x = 1000$ on trouve $R'(x) = 13 - 1000/250 = 13 - 4 = 9$. Lorsque 1000 crèmes à main sont vendues, le revenu augmente au taux de 9\$ par crème à main supplémentaire.

- (c) Le coût marginal est C' . On a

$$C'(x) = -0.004 \times 2x + 9.2 + 0 = -0.008x + 9.2.$$

Pour $x = 1000$ on trouve $C'(1000) = -0.008 \times 1000 + 9.2 = -8 + 9.2 = 1.2$. Lorsque la production mensuelle atteint 1000 crèmes à main, le coût augmente au taux de 1.20\$ par crème à main supplémentaire.

- (d) Le coût réel de la production du 1001ème DVD est

$$\begin{aligned}C(1001) - C(1000) &= (-0.004 \times 1001^2 + 9.2 \times 1001 + 5000) - (-0.004 \times 1000^2 + 9.2 \times 1000 + 5000) \\&= 1.196 \$ \approx 1.2 \$.\end{aligned}$$

- (e) Le profit est $P(x) = R(x) - C(x)$. Donc

$$\begin{aligned}P(x) &= R(x) - C(x) = 13x - 0.002x^2 - (-0.004x^2 + 9.2x + 5000) \\&= 0.002x^2 + 3.8x - 5000.\end{aligned}$$

On a donc $P(1000) = 0.002 \times 1000^2 + 3.8 \times 1000 - 5000 = 800 \$$.

Le profit marginal est

$$P'(x) = 0.002 \times 2x + 3.8 = 0.004x + 3.8.$$

On a donc $P'(1000) = 0.004 \times 1000 + 3.8 = 7.8 \$$.

Lorsqu'on vend 1000 DVD, le profit mensuel est de 800\$, et ce profit augmente au taux de 7.80\$ par DVD supplémentaire vendu.