

MAT 1739 - Cours 6

Limites et continuité (Fin) + Dérivées (Part I)

Automne 2019

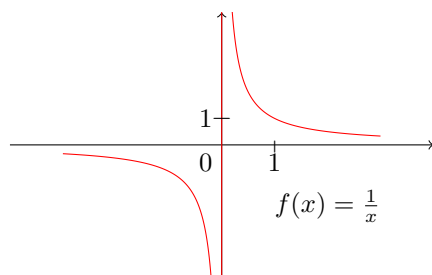
Table des matières

-1.7	Limites de types $1/0^+$ et $1/0^-$	1
-1.8	Asymptotes	1
0	Fonctions dérivées	3
0.1	Première approche	3
0.2	Définition	3

-1.7 Limites de types $1/0^+$ et $1/0^-$

On a :

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, ce qu'on note de manière symbolique $\frac{1}{0^+} = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, ce qu'on note de manière symbolique $\frac{1}{0^-} = -\infty$.



On peut appliquer cela pour des exemples un peu plus compliqués. Par exemple

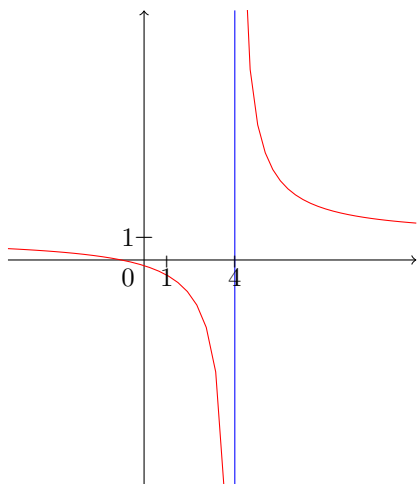
$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{7}{x-4} = \frac{7}{0^-} = -\infty$$

car $x-4 < 0$ lorsque x tend vers 4 à gauche de 4.

-1.8 Asymptotes

Étudions l'exemple suivant. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{4\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x+1}{x-4}$. Quelle est la limite $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$?

Le graphe de f est représenté ci-dessous :



On a $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty$. On dit que la droite d'équation $x = 4$ est une *asymptote verticale* à la courbe représentative de f .

De manière approximative, une asymptote est une droite de laquelle s'approche une courbe sans jamais l'atteindre.

Définition 1. Soit f une fonction et \mathcal{C} sa courbe représentative.

- La droite d'équation $x = a$ est une *asymptote verticale* à la courbe \mathcal{C} si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty.$$

- La droite d'équation $y = b$ est une *asymptote horizontale* à la courbe \mathcal{C} si

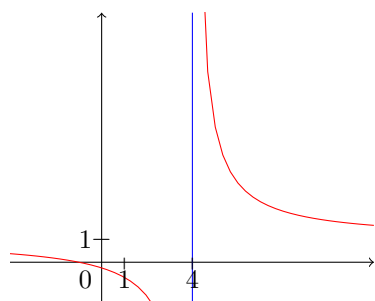
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

- La droite d'équation $y = ax + b$ est une *asymptote oblique* à la courbe \mathcal{C} si

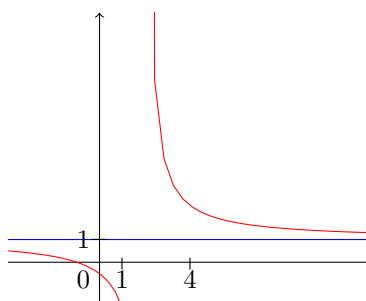
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Les valeurs de a et b se déterminent par les formules suivantes :

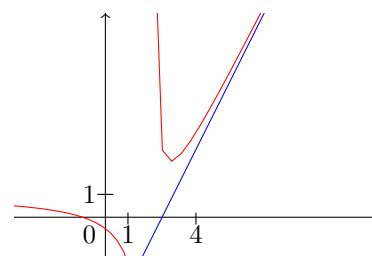
$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax).$$



asymptote verticale
d'équation $x = 4$



asymptote horizontale
d'équation $y = 4$



asymptote horizontale
d'équation $y = 2x - 5$

Remarque : Où chercher les asymptotes verticales ? La courbe d'une fonction f a une asymptote verticale d'équation $x = a$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ est infinie... Or, si f est continue en a , alors ces deux limites sont finies et valent $f(a)$, donc $x = a$ ne peut pas être asymptote verticale dans ce cas.

Conclusion : Si la courbe de f a une asymptote verticale en $x = a$, alors

- ou bien f n'est pas définie en a (a n'est pas dans le domaine de définition de f)
- ou bien f n'est pas continue en a .

Il suffit seulement de regarder les limites en ces points...

Bilan

- Avant de pouvoir définir $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ on a défini la notion de limite à gauche $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ et de limite à droite $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.
- La limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe si et seulement si la limite à droite et à gauche en a existent et sont égales.
- Une fonction f est continue en un point a de son domaine de définition si la limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe et est égale à $f(a)$.
- On peut généralement calculer les limites par des méthodes de substitution quand on travaille avec des fonctions continues.
- Quand on trouve des formes indéterminées, il faut aller plus loin...

0 Fonctions dérivées

0.1 Première approche

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et $a \in I$. Rappelons que le TVI de f en a est par définition la pente de la tangente à la courbe passant par $(a, f(a))$ (quand elle existe). Pour estimer le TVI, on calculait la pente de la sécante passant par les points d'abscisses a et $a + h$ avec h "petit". On avait

$$\text{TVI de } f \text{ en } a \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Maintenant qu'on connaît la notion de limite, on peut calculer exactement cette quantité en faisant tendre h vers 0.

0.2 Définition

Définition 2. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} et $a \in I$. On dit que f est *dérivable* en a si le quotient $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0. Cette limite est appelée *la dérivée de f au point a* et est notée

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point a de I . La fonction $f' : x \rightarrow f'(x)$ est appelée *la fonction dérivée de f* .

Remarque. On note parfois $\frac{df}{dx}$ la fonction dérivée de f .

Exemple. Calcul de la dérivée de la fonction $f : x \mapsto x^3$.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h \neq a$. On a

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} = \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - a^3}{h} \\ &= 3a^2 + 3ah + h^2. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3a^2 + 3ah + h^2) = 3a^2.$$

La fonction f est donc dérivable sur \mathbb{R} et f' est la fonction $x \mapsto 3x^2$.

Exemple. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -x + 5 & \text{si } x \leq 2 \\ 0.5x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$. Est-ce que f est dérivable en $x = 2$?

On regarde si la limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ existe. On a

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-(2+h) + 5 - (-2 + 5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

D'un autre côté, on a

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{0.5(2+h) + 2 - (-2 + 5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 + 0.5h + 2 + 2 - 5}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{0.5h}{h} = 0.5 \neq -1. \end{aligned}$$

La limite n'existe pas, donc f n'est pas dérivable en $x = 2$. Le graphe de f est représenté ci-dessous.

