Inscrivez vos réponses pour les questions à choix multiples dans ce tableau.

Question 1	Question 2
E	C

Ne rien inscrire dans le tableau suivant.

Total QCM	Question 3	Question 4	Question 5	Question 6	Total sur 23

1. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

$U = \{(x-y,\ x+y,\ x-y) \mid x,\ y \in \mathbb{R}\}$ ✓
$V = \{(x,\ y,\ -y) \mid x,\ y \in \mathbb{R}\}$ ✓
$W = \{(x^2,\ y,\ x+y) \mid x,\ y \in \mathbb{R}\}$ ✗
$X = \{(x, y, z) \mid x - y = 0\}$ ✓

A. Seulement U et V ✗
B. Seulement U et W ✗
C. Seulement W et X ✗
D. ~~Seulement U, W et X~~ ✗
E. $\boxed{\text{Seulement } U, V \text{ et } X}$ ✓
F. Seulement V et W ✗

• $U = \{x(1,1,1) + y(-1,1,-1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
$U = \mathcal{L}((1,1,1),(-1,1,-1))$. Donc c'est un s-es de $\mathbb{R}^3$.

• W n'est pas un s-es de $\mathbb{R}^3$ car pour $x=1$, $y=0$ on a $(1,0,1) \in W$ mais $(-1).(1,0,1) = (-1,0,-1) \notin W$.
(non-fermé pour la multiplication par scalaire).

De même

• $V = \{x(1,0,0) + y(0,1,-1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
$V = \mathcal{L}((1,0,0),(0,1,-1))$.
Donc c'est un s-es de $\mathbb{R}^3$.

• X est un plan passant par l'origine. Donc c'est un s-es de $\mathbb{R}^3$.

---

2. Parmis les énnoncés suivants le ou lesquel(s) est/sont vrais?

Faux I. L'ensemble des combinaisons linéaires de deux vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^2$ est $\mathbb{R}^2$. ✗

Vrai II. L'ensemble $\{(1,2)\}$ engendre une droite passant par l'origine dans $\mathbb{R}^2$.

Vrai III. Si dans un espace vectoriel V tout vecteur est combinaison linéaire de u et $u+v+w$ alors les vecteurs $\{u, v, w\}$ de V engendrent V.

Faux IV. L'ensemble $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ engendre M_{22}. ✗

Faux V. L'ensemble $\{(1,0,1), (0,2,3)\}$ engendre $\mathbb{R}^3$. ✗

Si $u_1 = u_2$ alors $\mathcal{L}(u_1, u_2) = \mathcal{L}(u_1)$ qui est une droite si $u_1 \neq \vec{0}$.

$\mathcal{L}(1,2)$ est une droite passant par l'origine

• En particulier tout vecteur de V est combinaison linéaire de $\{u, v, w\}$ et donc $\{u, v, w\}$ engendre V.

$M_{2,2}$ est de dimension 4.

$\mathbb{R}^3$ est de dimension 3.

A. Seulement I ✗
B. Seulement II ✗
C. Seulement II et III ✓
D. Seulement IV et V ✗
E. Seulement I, II, IV, et V ✗
F. Tous les énnoncés ✗

$x = -y+z$

3. Soit le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ suivant $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}$.

a) Expliquez **en une phrase** pourquoi W est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$. (*Vous n'avez pas à utiliser les critères du test des sous-espaces*)

b) Trouvez un ensemble de vecteurs qui engendre W.

c) En déduire une base pour W.

d) Donnez une interprétation géometrique complète de W.

(a) W est un plan passant par l'origine et donc est un s-es de $\mathbb{R}^3$.

(b) $W = \{(-y+z, y, z) \mid y,z \in \mathbb{R}\} = \{y(-1,1,0)+z(1,0,1) \mid y,z \in \mathbb{R}\}$

$\therefore W = \mathcal{L}((-1,1,0),(1,0,1))$ et $\{(-1,1,0),(1,0,1)\}$ engendre W.

(c) Comme $\{(-1,1,0),(1,0,1)\}$ engendre W il suffit de vérifier qu'il est linéᵗ indépᵗ. On a $x_1(-1,1,0)+x_2(1,0,1) = (-x_1+x_2, x_1, x_2) = (0,0,0)$

$\iff \begin{cases} -x_1+x_2=0 \\ x_1=0 \\ x_2=0 \end{cases}$ la slⁿ triviale.

D'où $\boxed{\{(-1,1,0),(1,0,1)\} \text{ est une base de } W}$.

(d) W est le plan engendré par $\{(-1,1,0),(1,0,1)\}$ et passant par l'origine. (Vecteur normal : $(1,1,-1)$).

4. Dans M_{22}, l'espace des matrices 2 et entrées réelles, soit

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & c \end{bmatrix} \in M_{22} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) Vérifiez que U est fermé pour l'addition, ou bien exprimez U sous une forme qui montre que U est une sous-espace.

(Pour les parties (b) et (c) vous pouvez supposer que U est un sous-espace de M_{22}.)

b) Trouvez une base de U et donnez sa dimension $\dim U$.

c) Donnez une base de U différente de celle donnée dans (b).

(*Justifiez vos réponses.*)

(a) On a : $U = \left\{ a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$

$U = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

Donc U est un s-es de $M_{2,2}$ (et donc est fermé pour l'addition).

N.B. : On peut faire la vérification directe.

(b) On a de (a) que $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ engendre U. Il est aussi linéᵗ indépᵗ. En effet,

si $a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$ la slⁿ triviale

et donc est linéᵗ indépᵗ. D'où $\boxed{\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\} \text{ est une base de } U}$.

(c) On peut prendre $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$.

N.B. : D'autres choix sont possibles. Par exple, $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$.

5. Indiquez si chacun des énoncés suivants est (toujours) vrai ou est (possiblement) faux, dans la case spécifiée

- Si vous indiquez qu'un énoncé est (possiblement) faux, vous devez **donner un contre-exemple explicite qui le montre.** Vous pouvez utiliser un exemple soit numérique soit avec des matrices soit des fonctions!
- Si vous indiquez que l'énoncé est (toujours) vrai, vous devez expliquer clairement votre raisonnement.

a) $X = \{f \in \mathbb{F}(\mathbb{R}) \mid f(x) \leq 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace de l'espace vectoriel des fonctions $\mathbb{F}(\mathbb{R}) = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

On a : $f(x) = -x^2 \in X$ mais

$((-1) \cdot f)(x) = -f(x) = x^2 \notin X$ car $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

RÉPONSE: Faux

b) Si V est un espace vectoriel et si $\{v_1, v_2\}$ engendre V, alors $\{v_1, v_2, v_3\}$ engendre V pour tout vecteur v_3 de V.

Comme $\{v_1, v_2\}$ engendre V alors $v_3 \in \mathcal{L}(v_1, v_2)$ pour tout $v_3 \in V$.

Donc $\mathcal{L}(v_1, v_2) = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$.

RÉPONSE: Vrai

5 (suite).

c) $\underbrace{\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{22} \mid a + c = 0 \right\}}_{= U}$ est un sous-espace de $\mathbb{M}_{22}$.

On a : de $a + c = 0 \iff a = -c$. Donc

$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -a & d \end{bmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$.

$U = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ et donc est un sev de $\mathbb{M}_{2,2}$.

RÉPONSE: Vrai

d) Soient u_1, u_2 et u_3 des vecteurs d'un espace vectoriel U. Si $\{u_1, u_2, u_3\}$ est linéairement indépendant, alors $\dim U = 3$.

On a de ceci que $\dim U \geq 3$.

(Il se peut que $\dim U > 3$).

RÉPONSE: Faux

6. [Bonus/Défit] Soient les vecteurs u, v, w **non-nuls** de $\mathbb{R}^{2016}$. Si (les produits scalaires sont nuls) $u \cdot v = u \cdot w = v \cdot w = 0$, montrez que $\{u, v, w\}$ est linéairement indépendant.
Notez que vous ne pouvez pas montrer ceci juste pour un choix particulier de u, v et w. Votre explication doit justifier pourquoi ceci est vrai pour tout les vecteurs u, v et w de $\mathbb{R}^{2016}$. Notez que les arguments géométriques, tel que "*les vecteurs ne sont pas coplanaires, etc...*", ne sont pas acceptés.

Si $x_1 u + x_2 v + x_3 w = \vec{0}$ alors

$$\begin{cases} (x_1 u + x_2 v + x_3 w) \cdot u = \vec{0} \cdot u = 0 \\ (x_1 u + x_2 v + x_3 w) \cdot v = \vec{0} \cdot v = 0 \\ (x_1 u + x_2 v + x_3 w) \cdot w = \vec{0} \cdot w = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 (u \cdot u) + x_2 (u \cdot v) + x_3 (w \cdot u) = 0 \\ x_1 (u \cdot v) + x_2 (v \cdot v) + x_3 (w \cdot v) = 0 \\ x_1 (u \cdot w) + x_2 (v \cdot w) + x_3 (w \cdot w) = 0 \end{cases}$$

8

Mais $u \cdot v = u \cdot w = v \cdot w = 0$ et $\left(u \cdot u \neq 0 ;\ v \cdot v \neq 0 ;\ w \cdot w \neq 0 \right)$ car u, v, w sont non-nuls

Donc $\begin{cases} x_1 (u \cdot u) = 0 \\ x_2 (v \cdot v) = 0 \\ x_3 (w \cdot w) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ la s$^{\text{ln}}$ triviale.

D'où $\{u, v, w\}$ est liné$^{\text{t}}$ indép$^{\text{t}}$.

Inscrivez vos réponses pour les questions à choix multiples dans ce tableau

Question 1	Question 2
D	D

Ne rien inscrire dans le tableau suivant.

Total QCM	Question 3	Question 4	Question 5	Question 6	Total sur 23

1. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

$U = \{(x-2y,\ x+y,\ 3x-y) \mid x,\ y \in \mathbb{R}\}$ ✓
$V = \{(x,\ y^2,\ x+y) \mid x,\ y \in \mathbb{R}\}$ ✗
$W = \{(x, y, z) \mid -3x + y = 0\}$ ✓
$X = \{(x,\ z,\ -z) \mid x,\ z \in \mathbb{R}\}$ ✓

A. Seulement U et V ✗
B. Seulement U et W ✗
C. Seulement W et X ✗
D. Seulement U, W et X ✓
E. Seulement U, V et X ✗
F. Seulement V et W ✗

• $U = \{x(1,1,3) + y(-2,1,-1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
$U = \mathcal{L}((1,1,3), (-2,1,-1))$. Donc c'est un s-es de $\mathbb{R}^3$.

• W est un plan passant par l'origine et donc est un s-es de $\mathbb{R}^3$.

• Pour $x=0$, $y=1$, $(0,1,1) \in V$ mais $(-1)\cdot(0,1,1) = (0,-1,-1) \notin V$.
Donc V n'est pas un s-es.
(Non fermé pour la multiplication par scalaire).

• $X = \{x(1,0,0) + z(0,1,-1) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$
$= \mathcal{L}((1,0,0), (0,1,-1))$.
Donc c'est un s-es de $\mathbb{R}^3$.

2. Parmis les énoncés suivants le ou lesquel(s) est/sont vrais?

I. L'ensemble $\{(1,2,3)\}$ engendre une droite passant par l'origine dans $\mathbb{R}^3$. ✓

II. L'ensemble de deux vecteurs distincts quelconques de $\mathbb{R}^2$ est toujours linéairement indépendant. ✗

III. L'ensemble $\{(1,0,1), (2,0,2)\}$ engendre $\mathbb{R}^3$. ✗

IV. L'ensemble $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ engendre $\mathbb{M}_{22}$. ✗

V. Si dans un espace vectoriel V tout vecteur est combinaison linéaire de u et $u+v+w$ alors les vecteurs $\{u, v, w\}$ de V engendrent V. ✓

A. Seulement I ✗
B. Seulement II ✗
C. Seulement II et III ✗
D. Seulement I et V ✓
E. Seulement I, II, IV, et V ✗
F. Tous les énoncés ✗

I. $\mathcal{L}((1,2,3))$ est une droite passant par l'origine.

II. Si $u_1 = (0,0)$ et $u_2 \neq (0,0)$ $\{u_1, u_2\}$ est linéairement dépendant.

III. $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

IV. $\dim \mathbb{M}_{2,2} = 4$

V. En particulier tout vecteur de V est combinaison linéaire de $\{u, v, w\}$ et donc $\{u, v, w\}$ engendre V.

$x = -2y$

3. Soit le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ suivant $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 0\}$.

a) Expliquez **en une phrase** pourquoi W est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$. (*Vous n'avez pas à utiliser les critères du test des sous-espaces.*)

b) Trouvez un ensemble de vecteurs qui engendre W.

c) En déduire une base pour W.

d) Donnez une interprétation géometrique complète de W.

(a) W est un plan passant par l'origine et donc est un s-es de $\mathbb{R}^3$.

(b) $W = \{(-2y, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(-2,1,0) + z(0,0,1) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$.

$\therefore\ W = \mathcal{L}((-2,1,0),(0,0,1))$ et $\{(-2,1,0),(0,0,1)\}$ engendre W.

(c) On a de (b) que $\{(-2,1,0),(0,0,1)\}$ engendre W. Il est aussi linéᵗ indépᵗ. En effet, si $x_1(-2,1,0) + x_2(0,0,1) = (-2x_1, x_1, x_2) = (0,0,0)$

$\iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ la solᵘ triviale.

D'où $\boxed{\{(-2,1,0),(0,0,1)\} \text{ est une base de } W}$.

(d) W est le plan engendré par $\{(-2,1,0),(0,0,1)\}$ et passant par l'origine.

(vecteur normal : $(1,2,0)$).

4

(a) On a : $U = \left\{ a\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix} \;\middle|\; a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$

$U = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right)$. Donc U est un s-es de $\mathbb{M}_{2,2}$

(et donc est fermé pour l'addition).

4. Dans $\mathbb{M}_{22}$, l'espace des matrices 2 et entrées réelles, soit

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a+c \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{22} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) <u>Vérifiez</u> que U est fermé pour l'addition, <u>ou bien</u> exprimez U sous une forme qui montre que U est une sous-espace.

(Pour les parties (b) et (c) vous pouvez supposer que U est un sous-espace de $\mathbb{M}_{22}$.)

b) Trouvez une base de U et donnez sa dimension $\dim U$.

c) Donnez une base de U différente de celle donnée dans (b)

(*Justifiez vos réponses*)

(b) On a de (a) que $\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$ engendre U. Il est aussi linéᵗ indépᵗ car si

$a\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a&b\\b&a+c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ a+c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$ la solᵘ triviale.

D'où $\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$ est une base de U.

(c) On peut prendre $\left\{\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$.

N.B. : D'autres choix sont possibles. Par exple, $\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&3\\3&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$.

5. Indiquez si chacun des énoncés suivants est (toujours) vrai ou est (possiblement) faux, dans la case spécifiée.

- Si vous indiquez qu'un énoncé est (possiblement) faux, vous devez **donner un contre-exemple explicite qui le montre.** Vous pouvez utiliser un exemple soit numérique soit avec des matrices soit des fonctions!
- Si vous indiquez que l'énoncé est (toujours) vrai, vous devez expliquer clairement votre raisonnement.

a) $X = \{f \in \mathbb{F}(\mathbb{R}) \mid f(x) \geq -1 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace de l'espace vectoriel des fonctions $\mathbb{F}(\mathbb{R}) = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

On a $f(x) = x^2 - 1 \in X$ mais $((-1)f)(x) = -f(x) = -x^2+1 \notin X$

car $-x^2+1 \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

RÉPONSE: Faux

b) Si V est un espace vectoriel et si $\{v_1, v_2, v_3\}$ engendre V, alors $\{v_1, v_2, v_3\}$ est linéairement indépendant.

Dans $\mathbb{R}^2$, $\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ engendre $\mathbb{R}^2$

mais est linéairt dépt car $(1,1) = (1,0) + (0,1)$.

RÉPONSE: Faux

5 (suite).

c) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{22} \mid a - d = 0 \right\} = U$ est un sous-espace de $\mathbb{M}_{22}$.

On a de $a - d = 0 \iff a = d$. Donc

$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$

$U = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$ et donc U est un s-es de $\mathbb{M}_{2,2}$.

RÉPONSE: Vrai

d) Soient u_1, u_2 et u_3 des vecteurs d'un espace vectoriel U. Si $\{u_1, u_2, u_3\}$ engendrent U, alors $\dim U = 3$.

On a de cece que $\dim U \leq 3$.

(Il se peut que $\dim U < 3$).

RÉPONSE: Faux