Exercice 1

Représentez la région du plan délimitée par les courbes $y^2 = 1 - x$ et $x = y^2 - 1$, puis calculez-en l'aire.

Exercice 2

Calculez le volume du solide à fond plat dont la base dans le plan xy est la région délimitée par l'axe des y et la parabole $x = 1 - y^2$ et dont les sections perpendiculaires à l'axe des x sont des demi-disques.

Exercice 3

On veut calculer le volume du solide de révolution $\mathcal{S}$ obtenu par rotation autour de la droite $y = -1$ de la région $\mathcal{R}$ du plan délimitée par les courbes

$$y = x \text{ et } y = 2\sqrt{x}.$$

1. Dessinez cette région $\mathcal{R}$, la trace de $\mathcal{S}$ dans le plan xy, et l'anneau de section du solide $\mathcal{S}$ par le plan des points d'abscisse x générale, avec ses dimensions.
2. Quels sont le rayon intérieur r_i, le rayon extérieur r_e et l'aire $A(x)$ de cet anneau ?
3. Écrivez l'intégrale qui donne le volume de $\mathcal{S}$ et calculez-la.

Exercice 4

Soit $\mathcal{R}$ la région du plan délimitée par les courbes $y = \cos(x)$ et $y = 2 - \cos(x)$ avec $0 \leq x \leq 2\pi$

1. Dessinez la région $\mathcal{R}$ puis calculez son aire.
2. Soit $\mathcal{S}$ le solide de révolution obtenu par rotation de la région $\mathcal{R}$ autour de la droite verticale $x = 2\pi$. Dessinez la trace de $\mathcal{S}$ dans le plan xy, et le cylindre mince obtenu par rotation de la portion verticale de $\mathcal{R}$ comprise entre les abscisses x et $x + \Delta x$ pour x général et Δx petit, avec ses dimensions. Quels sont, en première approximation, le rayon r, la hauteur h et le volume ΔV de ce cylindre ?
3. Écrivez l'intégrale qui donne le volume de $\mathcal{S}$ et calculez-la.

Ex 1 $y^2 = x-1$, $x = y^2-1$

→ On écrit les eqn sous forme x en fonction de y

$x = 1-y^2$ $x = y^2-1$

→ Determiner les points d'intersection :

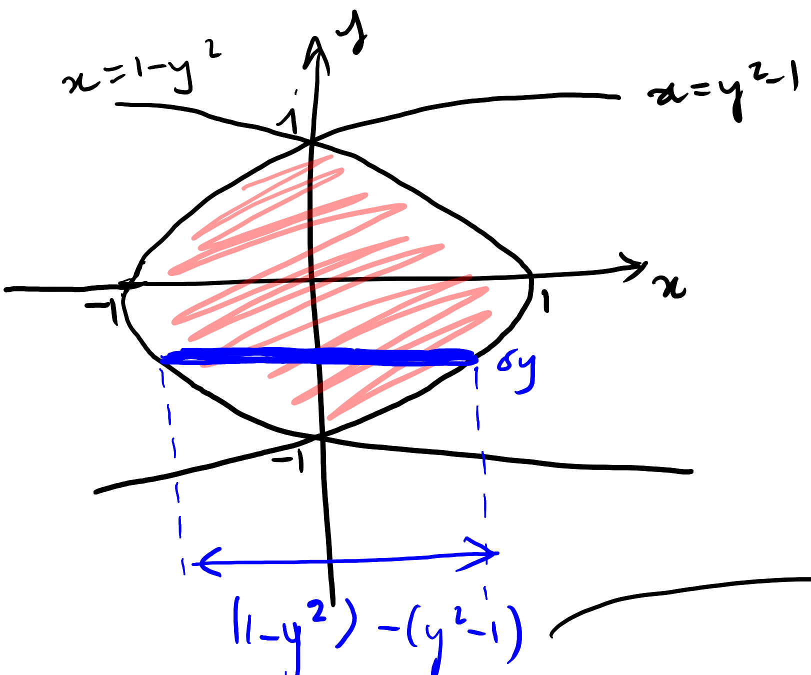
$$1-y^2 = y^2-1$$

$$2y^2 = 2$$

$$y = -1, 1$$

→ Donc les 2 courbes se coupent aux points

$(0,1)$ $(0,-1)$



→ On décompose la region en bandes horizontales minces d'épaisseur Δy, et de longueur égale à $(1-y^2)-(y^2-1)$

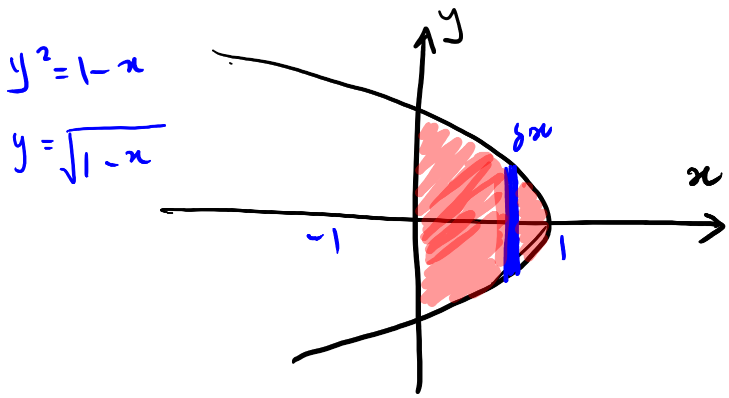
→ l'aire d'une bande mince pour l'ordonnée y est de $(2-2y^2)\Delta y$

→ $A = \int_{-1}^{1} 2-2y^2\,dy = \left[2y - \frac{2y^3}{3}\right]_{-1}^{1}$

$= 2(1--1) - \frac{2(1--1)^3}{3}$

$= 8/3$

Ex 2 la parabole $x = 1 - y^2$ coupe l'axe des x au point $(1,0)$



→ la section par le plan P_x perpendiculaire à l'axe Ox au point x est une demi-disque de rayon $|y| = \sqrt{1-x}$, sa surface est :

$$A(x) = \frac{1}{2}\pi\left(\sqrt{1-x}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi(1-x)$$

→ On en déduit que le volume est :

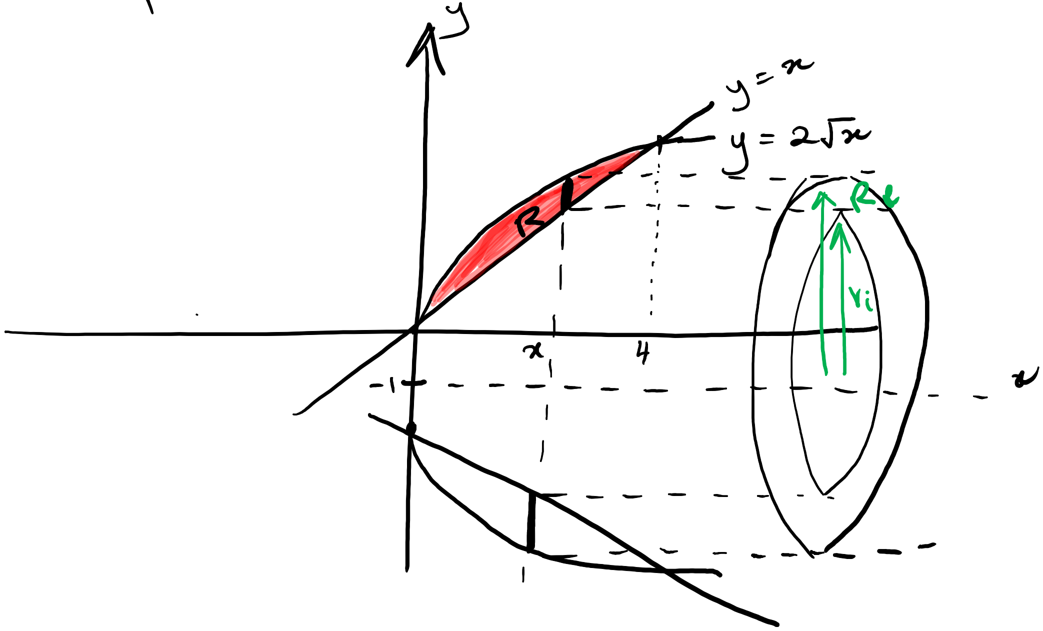
$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\pi(1-x)\,dx = \frac{1}{2}\pi\left[\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2}(1)^2 - 0\right) = \frac{\pi}{4} \simeq 0.785.$$

Ex 3. 1) les points d'intersections des deux courbes sont définis par : $x = 2\sqrt{x}$

$$x^2 = 4x$$
$$x^2 - 4x = 0$$
$$x(x-4) = 0$$
$$x = 0, 4$$

→ Donc les points d'intersection sont $(0,0)$, $(4,4)$



-> le rayon intérieure $r_i = x+1$

le rayon extérieure $r_e = 2\sqrt{x}+1$.

Aire de l'anneau:

$$A(x) = \pi r_e^2 - \pi r_i^2$$

$$= \pi(2\sqrt{x}+1)^2 - \pi(x+1)^2$$

$$= \pi(2x+4\sqrt{x}-x^2)$$

3) -> $\mathrm{Vol}(S) = \int_0^4 A(x)\,dx =$

$$= \int_0^4 \pi(2x+4\sqrt{x}-x^2)\,dx$$

$$= \pi\left[x^2 + \frac{8}{3}x^{3/2} + \frac{1}{3}x^3\right]_0^4$$

$$= 16\pi \simeq 50.26\ u^3$$