MAT 1700 – Partiel I – 7 Juin 2012

Enseignante: Yasmine Samia

NOM Solutions.

D'ETUDIANT

Instructions: Cet examen consiste en 5 questions à choix multiples, 5 questions à développement, et 1 question bonus, pour un total de 11 questions sur 8 pages. La valeur de chaque question est indiquée au début de chacune des questions. La valeur totale de l'examen est 30 avec 2 points possible en bonus.

SVP écrivez vos réponses aux questions à choix multiples dans les cases ci-dessous. Seules ces réponses finales compteront pour des points. Vous pouvez utiliser le verso des pages comme brouillon, ou feuilles de réponses en l'indiquant clairement.

Durée: 80 minutes

PAS DE CELLULAIRES. PAS DE LIVRES. PAS DE NOTES DE COURS.

Réponses aux questions à choix multiples:

#1	#2	#3	#4	#5
B	D	C	D	A

Questions à choix multiples

1. (1 point) Résoudre l'inéquation suivante

$$-2|2x-3|+1 \geq -5$$

A. $(-\infty, 0] \cup [3, \infty)$ B. $[0,3]$ C. Il n'y a pas de solutions D. $(-\infty, -3] \cup [0, \infty)$

$-2|2x-3|+1 \geqslant -5$

$-2|2x-3| \geqslant -6$

$|2x-3| \leqslant 3 \iff -3 \leqslant 2x-3 \leqslant 3$

$0 \leqslant 2x \leqslant 6$

$\boxed{0 \leqslant x \leqslant 3}$.

2. (1 point) Etant donnée $f(x) = |x|$, quelles sont les transformations appliquées sur le graphe de $f(x)$ pour obtenir

$$g(x) = |x+2| - 3$$

A. Une translation horizontale de 2 unités vers la droite et une translation verticale de 3 unités vers le bas

B. Une translation horizontale de 2 unités vers la gauche et une translation verticale de 3 unités vers le haut

C. Une translation horizontale de 2 unités vers la droite et une translation verticale de 3 unités vers le haut

D. Une translation horizontale de 2 unités vers la gauche et une translation verticale de 3 unités vers le bas

E. Aucune des réponses ci-dessus

3. (1 point) Trouvez la pente de la droite tangente au graphe de $y = -\sqrt{4x+1}$ quand $x = 0$.

A. 0 B. -1 C. -2 D. 2 E. 1

$$\frac{dy}{dx} = \left[-(4x+1)^{1/2}\right]' = -\frac{1}{2}(4x+1)^{-1/2}.(4) = \frac{-2}{\sqrt{4x+1}}$$

Pour $x = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{-2}{\sqrt{4(0)+1}} = -2$.

4. (1 point) Etant donnée $f(x) = \dfrac{1-2x}{2}$, trouvez $f^{-1}(2)$.

A. $\dfrac{3}{2}$ B. $\dfrac{5}{2}$ C. $-\dfrac{5}{2}$ D. $-\dfrac{3}{2}$ E. La fonction inverse n'existe pas.

$$y = \frac{1-2x}{2} \Rightarrow x = \frac{1-2y}{2} \Rightarrow 2x = 1-2y \Rightarrow 2x-1 = -2y$$

$$\Rightarrow y = \frac{2x-1}{-2} = \frac{1-2x}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1-2x}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(2) = \frac{1-2(2)}{2} = \frac{1-4}{2} = \frac{-3}{2}$$

5. (1 point) Les fonctions demande et coût pour un certain produit sont données respectivement par:

$$p = 21 - \frac{3}{2}\sqrt{x}, \quad C(x) = 10 + x,$$

où x est le nombre des unités produites. Le profit marginal quand $x = 100$ est

A. -2.5 B. 5 C. -5 D. 2.5 E. Aucune de ces réponses.

$$R(x) = x.p = 21x - \frac{3}{2}x\sqrt{x}$$

$$P(x) = R(x) - C(x) = 21x - \frac{3}{2}x\sqrt{x} - 10 - x$$

$$= 20x - \frac{3}{2}x\sqrt{x} - 10$$

$$= 20x - \frac{3}{2}x^{3/2} - 10$$

$$\Rightarrow P'(x) = 20 - \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)x^{1/2} = 20 - \frac{9}{4}\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow P'(100) = 20 - \frac{9}{4}(10) = 20 - \frac{45}{2} = -\frac{5}{2} = -2.5$$

Questions à réponses longues

6. (5 points) Déterminez la valeur de la limite suivante, si elle existe

$$\lim_{x \to -6} \frac{2x+12}{|x+6|}$$

- $|x+6| = \begin{cases} x+6 & \text{si } x+6>0 \Rightarrow x>-6 \\ -(x+6) & \text{si } x+6 \leq 0 \Rightarrow x \leq -6 \end{cases}$ [1]

Donc il faut considérer la limite à gauche à droite de -6.

- $\lim_{x \to -6^-} \frac{2x+12}{|x+6|} = \lim_{x \to -6^-} \frac{2\cancel{(x+6)}}{-\cancel{(x+6)}} = -2$. [1] [0,5]

- $\lim_{x \to -6^+} \frac{2x+12}{|x+6|} = \lim_{x \to -6^+} \frac{2\cancel{(x+6)}}{\cancel{(x+6)}} = 2$. [1] [0,5]

Puisque la limite à gauche est différente
[1] de la limite à droite de -6,
alors la $\lim_{x \to -6} \frac{2x+12}{|x+6|}$ n'existe pas.

7. Déterminez le domaine des fonctions suivantes

(a) (2 points) $g(x) = \dfrac{\sqrt{1-3x}}{x-\frac{1}{2}}$

Il faut que $x - \frac{1}{2} \neq 0$ et $1 - 3x \geq 0$.

[0.75] $\boxed{x \neq \frac{1}{2}}$ et $-3x \geq -1$

$\boxed{x \leq \frac{1}{3}}$. [0.75]

Donc $D_g = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$ [0.5]

(b) (3 points) $f(x) = \dfrac{x+1}{\ln(x^2-1)}$

Il faut que : ① $\ln(x^2-1) \neq 0$ et ② $x^2 - 1 > 0$.

① $\ln(x^2-1) \neq 0$

[1.5]

$x^2 - 1 \neq e^0 = 1$.

$x^2 - 1 \neq 1$

$x^2 \neq 2$

$\boxed{x \neq \pm\sqrt{2}}$.

② $x^2 - 1 > 0$

$(x-1)(x+1) > 0$. [1]

	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-1)(x+1)$	$+$		$-$		$+$

$\Rightarrow \boxed{x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)}$.

Donc $D_f = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

[0.5].

8. Soit

$$f(x) = \begin{cases} \text{2-x}, & x \neq 1; \\ \text{x+1}, & x = 1. \end{cases}$$

(a) (1 point) Trouvez $f(1)$

$f(1) = 1+1 = 2$. [1]

(b) (2 points) Calculez $\lim_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim_{x\to 1^-} f(x)$. Est-ce que la limite existe?

- $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2-x) = 2-1 = 1$. [0.25]
- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2-x) = 2-1 = 1$ [0.75]

Puisque les limites à gauche et à droite existent et sont égales, alors $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe et est égale à 1 . [0.5]

(c) (2 points) Est-ce que $f(x)$ est continue? (Vous devez **justifier** votre réponse pour obtenir tous les points)

- $f(x)$ est continue partout sauf possiblement en $x=1$.
- $f(x)$ est continue en $x=1$ ssi $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$

Mais $f(1) = 2$ (d'après la partie (a)).

$\Rightarrow f(1) \neq \lim_{x\to 1} f(x)$ [2]

Donc $f(x)$ n'est pas continue en $x=1$
Donc elle n'est pas continue sur son domaine.

9. Les questions (a) et (b) suivantes sont indépendantes

(a) (2 ½ points) Trouvez $g'(x)$ pour $g(x) = \ln(5e^{x^2}(x^2+1)^2)$ (simplifiez votre réponse)

$$g(x) = \ln 5 + \ln e^{x^2} + \ln(x^2+1)^2$$
$$= \ln 5 + x^2 + 2\ln(x^2+1)$$

[1.5]

$$\Rightarrow g'(x) = 2x + 2\cdot\frac{2x}{x^2+1} = 2x + \frac{4x}{x^2+1}$$

[1]

(b) (3 ½ points) Répondre aux questions suivantes

i. Trouvez $\dfrac{dy}{dx}$ de $y^3 - 8xy = 8 - 4x^2y$.

ii. Quelle est l'équation de la droite tangente à la courbe au point $(2, 2)$?

i) $\frac{d}{dx}[y^3 - 8xy] = \frac{d}{dx}[8 - 4x^2y]$

[1.5] $3y^2y' - 8y - 8xy' = -8xy - 4x^2y'$

[0.5]

$y'(3y^2 - 8x + 4x^2) = -8xy + 8y \Rightarrow \boxed{y' = \frac{dy}{dx} = \frac{8y(1-x)}{3y^2 - 8x + 4x^2}}$

ii) $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,2)} = \frac{8(2)(1-2)}{3(2)^2 - 8(2) + 4(2)^2} = \frac{-16}{12 - 16 + 16} = -\frac{16}{12} = -\frac{4}{3}$

[0.5]

$\Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + b \Rightarrow 2 = -\frac{4}{3}(2) + b \Rightarrow \boxed{b = \frac{14}{3}}$

[1]

$\Rightarrow$ Eqt de la tgte : $\boxed{y = -\frac{4}{3}x + \frac{14}{3}}$

10. (4 points) Supposons qu'un ancien étudiant de l'université d'Ottawa voudrait donner de l'argent à l'université pour attribuer une bourse aux étudiants de gestion. Quelle somme devrait cet étudiant investir à un taux d'intérêt de 7% composé continuellement de sorte que son investissement initial devienne \$ 18,000 dans 5 ans?

$A = Pe^{rt}$ avec $A = 18000\,\$$, $t = 5$, $r = 0.07$. [1]

$\Rightarrow 18000 = Pe^{0.07(5)}$

[3]

$\Rightarrow P = \dfrac{18000}{e^{0.35}} \approx 12{,}684.39\,\$$

11. (2 points (bonus)) Calculez la limite suivante, si elle existe

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6e^{4x} - e^{-2x}}{8e^{4x} - e^{-2x} + 3e^{-x}}.$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6e^{4x} - e^{-2x}}{8e^{4x} - e^{-2x} + 3e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{4x}(6 - e^{-6x})}{e^{4x}(8 - e^{-6x} + 3e^{-5x})} \quad [1]$$

$$= \frac{6-0}{8-0+0} \quad \left(\text{puisque } \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0\right)$$

[1]

$$= \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$