Université d'Ottawa
Départment de Mathématiques et de Statistiques

MAT 1732B : Calcul II pour science de la vie

Professeur: Abdelkrim El basraoui

Examen partiel I – Version A - Solution

12 février 2014

Nom ______________________ Prénom ______________________

d'étudiant ______________________

Instructions: (Lisez-les attentivement S.V.P.)

- Écrivez votre nom et numéro d'étudiant dans la première page et dans chaque page détachée, s'il y a lieu, dans l'espace précisé.
- La durée de cet examen est de **80 minutes**.
- Cet examen est un examen à livres fermés qui comporte **7 questions**.
- Vous devez justifier votre travail.
- Seules les calculatrices non programmables et non graphiques telles que la TI30X ou similaires sont permises.
- Vous avez deux pages supplémentaires à la fin que vous pouvez utiliser comme feuille de brouillon.

BONNE CHANCE!!!

Question	1	2	3	4	5	6	7	Total
Maximum	4	3	4	6	4	4	5	30
Note								

Question 1. [4 points] Calculez les intégrales suivantes:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{3y-4}{y^2-4y+4}\,dy$ b) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{1}{x[1+(\ln x)^2]}\,dx$

Solution:

a) On a $y^2-4y+4=(y-2)^2$. On pose $u=y-2$ et donc $\frac{du}{dy}=1$. Aussi on a

y	-1	1
U	-3	-1

Donc en éxprimant $3y-4=3y-6+2=3(y-2)+2$ on a

$$\int_{-1}^{1} \frac{3y-4}{y^2-4y+4}\,dy = \int_{-1}^{1} \frac{3(y-2)+2}{y^2-4y+4}\,dy = \int_{-1}^{1} \frac{3(y-2)}{y^2-4y+4}\,dy + \int_{-1}^{1} \frac{2}{(y-2)^2}\,dy$$
$$= \int_{-3}^{-1} \frac{3u}{u^2}\,du + \int_{-3}^{-1} \frac{2}{u^2}\,du = [3\ln|u|]_{-3}^{-1} - 2[u^{-1}]_{-3}^{-1} = -3\ln(3) + \frac{4}{3}.$$

b) On pose $u=\ln(x)$ et donc $\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}$. Aussi on a

x	1	e
U	0	1

Donc obtient

$$\int_{1}^{e} \frac{1}{x[1+(\ln x)^2]}\,dx = \int_{0}^{1} \frac{1}{1+u^2}\,du = [\arctan(u)]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Question 2. [3 points] Résolvez l'équation différentielle séparable et à condition initiale suivante:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{7te^{-5t}}{y} \qquad y(0) = 4.$$

Solution:

- Séparation:

$$ydy = 7te^{-5t}dt$$

- Intégration: une I.P.P. (avec $f(t) = t \Rightarrow f'(t) = 1$ et $g'(t) = e^{-5t} \Rightarrow g(t) = -e^{-5t}/5$) donne

$$\int ydy = \frac{y^2}{2} = \int 7te^{-5t}dt = \frac{-7}{25}\,(1 + 5\,t)\,e^{-5t} + C.$$

- Constante C: Avec la C.I. $y(0) = 4$ on a

$$\frac{16}{2} = 8 = \frac{-7}{25} + C \Rightarrow C = \frac{207}{25}.$$

- Isolation: On a donc

$$y(t) = \pm\sqrt{\frac{-14}{25}\,(1 + 5\,t)\,e^{-5t} + \frac{414}{25}}.$$

- Conclusion: comme $y(0) = 4$ on a donc

$$y(t) = \sqrt{\frac{-14}{25}\,(1 + 5\,t)\,e^{-5t} + \frac{414}{25}}.$$

Question 3. [4 points] Trouvez l'intégrale suivante

$$\int \frac{5x+17}{x^2+5x-14}\,dx.$$

Solution: Vu que $x^2+5x-14=(x-2)(x+7)$ on utilisera les fractions partielles. De

$$\frac{5x+17}{x^2+5x-14}=\frac{A}{x+7}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x+7)}{x^2+5x-14}$$

on a $A(x-2)+B(x+7)=5x+17$. Donc

$$\text{pour } x=-7 \;\Rightarrow\; A=2$$

$$\text{et pour } x=2 \;\Rightarrow\; B=3\,.$$

D'où on a

$$\int \frac{5x+17}{x^2+5x-14}\,dx=\int \frac{2}{x+7}dx+\int \frac{3}{x-2}dx=2\ln|x+7|+3\ln|x-2|+C\,.$$

Question 4. [6 points] Déterminez si les intégrales impropres suivantes convergent ou divergent. S'elles convergent déterminez leurs valeurs.

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{5+2x}{x^2}dx$ b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{4}{\sqrt[3]{x-1}}dx$

Solution:

a)
- Primitive: on a
$$\int \frac{5+2x}{x^2}dx = \int \frac{5}{x^2}dx + \int \frac{2}{x}dx = \frac{-5}{x} + 2\ln|x| + C\,.$$
- Évaluation: on a par définition
$$\int_1^\infty \frac{5+2x}{x^2}dx = \lim_{u\to\infty}\int_1^u \frac{5+2x}{x^2}dx = \lim_{u\to\infty}\left[\frac{-5}{x} + 2\ln|x|\right]_1^u = \infty\,.$$
- Conclusion: cette intégrale impropre diverge.

b)
- Domaine: soit $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt[3]{x-1}}$. On a $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Donc il s'agit d'une intégrale impropre en 1.
- Primitive: on posant $u = x-1$ on trouve facilement que
$$\int \frac{4}{\sqrt[3]{x-1}}dx = 6\sqrt[3]{(x-1)^2} + C$$
- Évaluation: on a par définition
$$\int_1^2 f(x)dx = \lim_{l\to1^+}\int_l^2 f(x)dx = \lim_{l\to1^+}\left[6\sqrt[3]{(x-1)^2}\right]_l^2 = 6\,.$$
- Conclusion: cette intégrale impropre converge vers 6.

Question 5. [4 points] Soient les fonctions $f(x) = 5x^2$ et $g(x) = -9x + 2$.
a) Trouvez les points d'intersection des graphes de f et de g.
b) Calculez l'aire bornée par f et g pour les valeurs de x entre les points d'intersection trouvés dans (a).

Solution:

a) On a $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 5x^2 + 9x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 1/5$ qui sont les points d'intersection.

b) Sur l'intervalle $[-2, 1/5]$ on a $f(x) \leq g(x)$ (comparer $f(0) = 0 < g(0) = 2$). Donc l'aire est

$$A =_{defn} \int_{-2}^{1/5} |f(x) - g(x)| dx = \int_{-2}^{1/5} (g(x) - f(x)) dx = \frac{1331}{150}.$$

Question 6. [4 points] Les Zombies ont envahi le campus!!! Ils recrutent plus de morts-vivants dans leur rang macabre au taux de

$$\frac{dz}{dt} = f(z) = -8z^3 + 64800z,$$

où t est le temps en heures et z est le nombre des zombies au temps t.

a) Déterminez les points d'équilibre biologiquement signifcatifs de cette équation autonome.

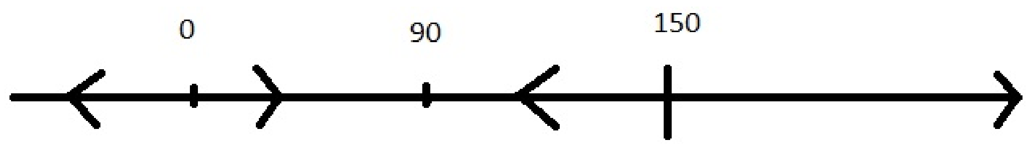
Solution: On a $f(z) = 0 \Leftrightarrow -8z(z^2 - 8100) = 0 \Leftrightarrow z = 0,\ z = \pm 90$. Donc les points d'équilibre biologiquement signifiant sont $z = 0$ et $z = 90$.

b) Déterminez la stabilité de chacun des points d'équilibre trouvés dans (a), en utilisant le test étudié en classe (le test de la dérivée).

Solution: On a $f'(z) = -24z^2 + 64800$.
Pour $z = 0$ on a $f'(0) = 64800 > 0$ et donc $z = 0$ est instable.
Pour $z = 90$ on a $f'(90) = -129600 < 0$ et donc $z = 90$ est stable.

c) Traçez le portrait de phase de cette équation pour $z < 150$.

Solution:



.

Question 7. [5 points] Déterminez la valeur moyenne de la fonction $f(x) = x\sin(2x)$ pour $0 \leq x \leq 2\pi$.

Solution: La valeur moyenne de f est donnée par

$$M_f = \frac{1}{2\pi - 0}\int_0^{2\pi} x\sin(2x)dx\,.$$

Maintenant, une I.P.P. (avec $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ et $g'(x) = \sin(2x) \Rightarrow g(x) = \frac{-1}{2}\cos(2x)$) donne

$$\int f(x)dx = \frac{-x}{2}\cos(2x) - \int \frac{-1}{2}\cos(2x)dx = \frac{-x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + C\,.$$

D'où

$$M_f = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{2\pi} = \frac{-1}{2}\,.$$

Page supplémentaire 1

Page supplémentaire 2